

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МУЗЫКАЛЬНЫХ СТРУННЫХ ИНСТРУМЕНТОВ.

С.В.Шлычков (kulikov@marstu.mari.ru)

Марийский Государственный технический университет

1.Введение.

Проектирование и производство высококачественных музыкальных инструментов – сложный и трудоемкий процесс, зависящий как от уровня расчетных математических моделей, с одной стороны, так и от качества материалов и технологии изготовления - с другой. При этом в практике проектирования [1,2], как правило, используются упрощенные расчетные модели и эмпирические формулы, которые не учитывают ряд важных особенностей, характерных для реальных конструкций. Это, безусловно, отражается на качестве музыкальных инструментов.

Музыкальный струнный инструмент (рис.1) - это конструкция, составленная из струн (1), грифа (2), резонансных дек (3) и ребер жесткости ("пружинок"). Составные элементы конструкции обычно изготавливаются из высококачественных пород древесины, металлов и полимеров. При этом основным звукоизлу-

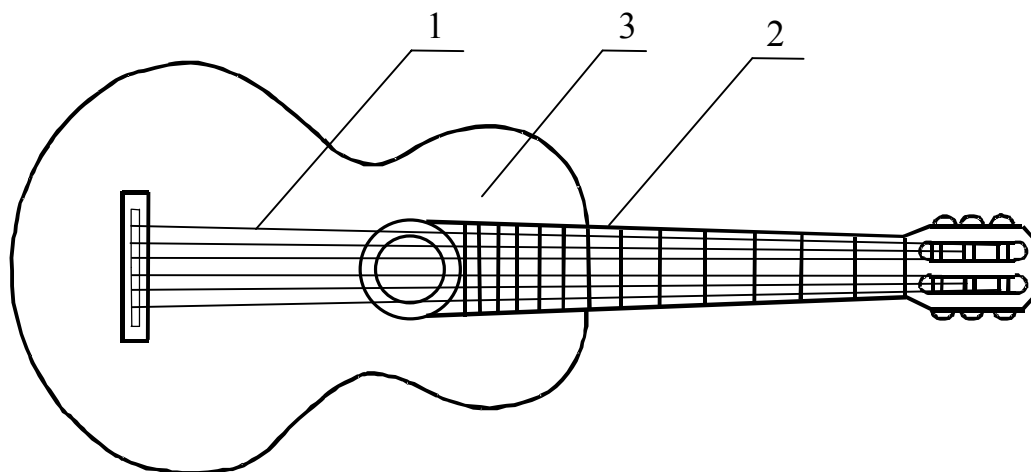


Рис.1

чающим элементом является дека (или резонансный щит), которая представляет собой тонкостенную деревянную панель сложной геометрической формы, нагруженную силами натяжения струн.

В наших работах разрабатывается уточненная расчетная динамическая модель [3]. Музыкальный струнный инструмент представляется в виде ансамбля конечных элементов (КЭ): струн (рис.2,а), балок (рис.2,б) и пластинок (рис.1,в). Древесина считается как ортотропный материал. В качестве расчетной схемы дека применяется предварительно напряженная тонкостенная пластинка.

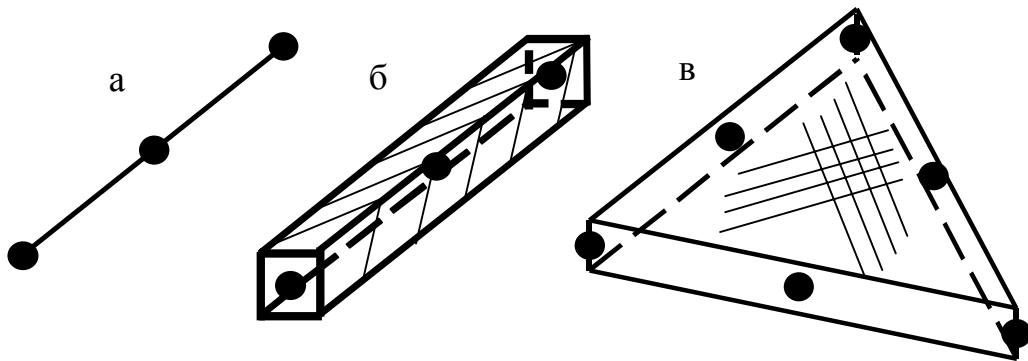


Рис.2

Задача динамики описывается однородной системой дифференциальных уравнений вида

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K - G]\{q\} = 0 \quad (1.1)$$

и системой линейных алгебраических уравнений

$$[K]\{q_m\} = \{F_m\}. \quad (1.2)$$

Здесь, $[M]$, $[K]$ и $[G]$ - матрицы масс, жесткости и начальных напряжений (геометрической жесткости); $\{\ddot{q}(t)\}$, $\{q(t)\}$, $\{q_m\}$ - векторы обобщенных ускорений и перемещений соответственно.

Дифференциальное уравнение (1.1) описывает свободные колебания предварительно напряженной динамической системы относительно равновесной формы (конфигурации) (1.2). Напряженно-деформированное состояние (НДС), соответствующее равновесной форме, определяется силами натяжения струн

$\{F_m\}$. Влияние мембранных усилий на изгибную жесткость деки учитывается при помощи матрицы начальных напряжений $[G]$.

В настоящей статье представлены результаты предварительного исследования. Рассматривается статическая задача расчета параметров НДС. Решение задачи динамики предполагается рассмотреть в последующих работах.

Задачам статики и расчетам НДС тонкостенных элементов конструкций посвящена обширная литература, например [4,5]. В ней представлены результаты многочисленных теоретических и экспериментальных исследований.

В настоящей работе ставится задача оценки точности треугольного КЭ [6]. Дается сопоставление результатов расчетов методом конечных элементов (МКЭ) с точными аналитическими решениями (исследуется сходимость решений). При этом на базе КЭ [6] и алгоритма ансамблирования МКЭ разрабатывается программа расчета ASCM.

2. Краткое описание конечного элемента.

Для вывода расчетных соотношений используется смешанная вариационная формулировка. Задача статики формулируется на основе принципа возможных перемещений:

$$\iint_S \delta\{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\}dS - \iint_S \delta\{u\}^T \{p\}dS - \int_{\sigma} \delta\{u\}^T \{\bar{N}\}d = 0 \quad (2.1)$$

Здесь $\{u\}$ - вектор обобщенных перемещений; $\{p\}$ -вектор поверхностной нагрузки; $\{\varepsilon\}$ - вектор обобщенных деформаций; S - площадь поверхности тела, на которой заданы внешние силы p ; σ - длина контура, на котором заданы кинематические граничные условия; $\{\bar{N}\}$ -вектор внешних погонных нагрузок; $[D]$ - матрица обобщенных жесткостных характеристик.

Формулировка (2.1) подразумевает, что обобщенные деформации $\{\varepsilon\}$ определяются обобщенными перемещениями $\{u\}$, то есть

$$\{\varepsilon\}=[L] \{\varepsilon\}, \quad (2.2)$$

где $[L]$ - дифференциальный оператор.

Если равенство (2.2) использовать в качестве дополнительного условия связи $[L]\{u\}-\{\varepsilon\}=0$, то, потребовав равенства нулю интегральной невязки

$$\iint_S \delta\{\varepsilon\}^T ([L]\{u\}-\{\varepsilon\})dS = 0 \quad \text{для}$$

При построении дискретной схемы тонкостенных конструкций сложной геометрической формы удобно воспользоваться треугольными КЭ. Рассмотрим треугольный КЭ с шестью узлами и тридцатью степенями свободы $n=30$ (рис.3) [6].

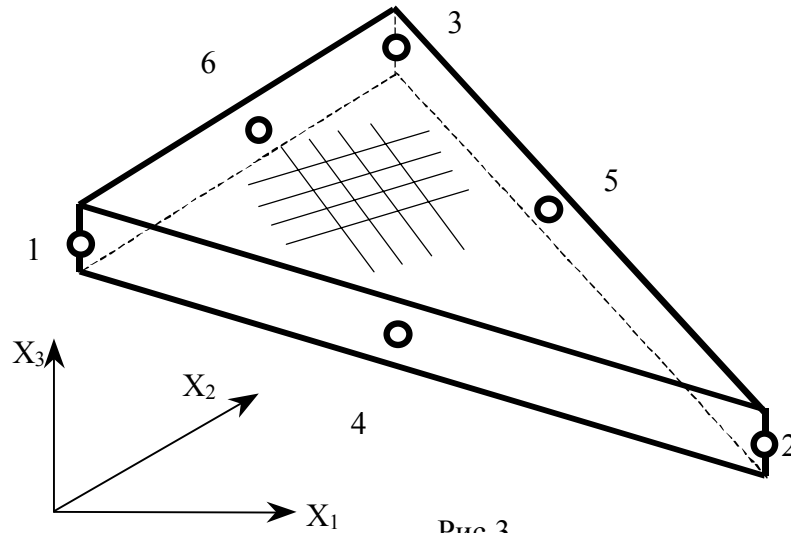


Рис.3

Для вывода расчетных соотношений воспользуемся теорией тонких пластинок типа Тимошенко, учитывающей деформации поперечного сдвига. В этом случае вектор перемещений запишем как $\{u\} = \{u_1, u_2, w, \theta_1, \theta_2\}^T$, а вектор деформаций как $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \chi_{12}, \psi_1, \psi_2\}^T$.

При аппроксимации компонент вектора $\{u\}$ воспользуемся полными полиномами второго порядка. В этом случае суммарное число обобщенных узловых перемещений $n=30$.

Вектор обобщенных узловых перемещений КЭ представим в виде $\{q\} = \{ \{q\}_{(1)}^T, \{q\}_{(2)}^T, \{q\}_{(3)}^T, \dots, \{q\}_{(6)}^T \}^T$, где $\{q\}_{(i)} = \{u_{1(i)}, u_{2(i)}, w(i), \theta_{1(i)}, \theta_{2(i)}\}^T$ - вектор обобщенных перемещений i -го узла размерности (5×1) . При этом $i=1, 2, \dots, 6$.

При аппроксимации компонент вектора $\{\varepsilon\}$ используются полные линейные полиномы. В этом случае суммарное число независимых компонент вектора $\{\alpha\} = \{\varepsilon_{1(1)}, \varepsilon_{1(2)}, \varepsilon_{1(3)}, \varepsilon_{2(1)}, \varepsilon_{2(2)}, \varepsilon_{2(3)}, \gamma_{12(1)}, \gamma_{12(2)}, \gamma_{12(3)}, \kappa_{1(1)}, \kappa_{1(2)}, \kappa_{1(3)}, \kappa_{2(1)}, \kappa_{2(2)}, \kappa_{2(3)}, \chi_{12(1)}, \chi_{12(2)}, \chi_{12(3)}, \psi_{1(1)}, \psi_{1(2)}, \psi_{1(3)}, \psi_{2(1)}, \psi_{2(2)}, \psi_{2(3)}\}$ равно 24.

Матрица функций формы $[\Phi]$ имеет размерность (5×30) и в блочном виде записывается следующим образом: $[\Phi] = [[\Phi]_{(1)}, [\Phi]_{(2)}, [\Phi]_{(3)}, [\Phi]_{(4)}, [\Phi]_{(5)}, [\Phi]_{(6)}]$, где $[\Phi]_{(i)} = \phi_i [E]$; $[E]$ -единичная матрица размерности (5×5) ; ϕ_i ($i=1,2,3,\dots,6$)-квадратичные функции формы. Для представления ϕ_i используются L -координаты:

$$\phi_1 = L_1(2L_1 - 1); \quad \phi_2 = L_2(2L_2 - 1); \quad \phi_3 = L_3(2L_3 - 1); \quad \phi_4 = 4L_1L_2; \quad \phi_5 = 4L_2L_3; \quad \phi_6 = 4L_3L_1.$$

Порядок нумерации функций формы соответствует нумерации узлов КЭ. L -координаты определяются через декартовы координаты x_1, x_2 (рис.3) следующим образом: $L_i = (a_{(i)} + b_{(i)}x_1 + c_{(i)}x_2) / 2S$ ($i=1,2,3$), где

$$a_{(1)} = x_{1(2)}x_{2(3)} - x_{1(3)}x_{2(2)}, \quad (1,2,3);$$

$$b_{(1)} = x_{2(2)} - x_{2(3)}, \quad (1,2,3);$$

$$c_{(1)} = x_{1(3)} - x_{1(2)}, \quad (1,2,3);$$

$$S = (b_{(1)}c_{(2)} - b_{(2)}c_{(1)}) / 2.$$

Здесь $x_{1(i)}, x_{2(i)}$ ($i=1,2,3$) – координаты вершин треугольника. Остальные коэффициенты $a_{(i)}, b_{(i)}, c_{(i)}$ получаются с помощью циклической перестановки индексов, заключенных в круглые скобки. Коэффициент S равен площади КЭ.

При построении матрицы обобщенных жесткостных характеристик КЭ учитываем, что оси упругой симметрии не совпадают с осями координат. В качестве начала отсчета выбирается срединная плоскость. В этом случае при симметричной относительно срединной поверхности структуре материала соотношения между обобщенными напряжениями и деформациями разделяются на две независимые группы отдельно для усилий и моментов. В результате имеем [7]:

$$[D] = \begin{bmatrix} [B] & 0 & 0 \\ 0 & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [K] \end{bmatrix}$$

Коэффициенты матрицы обобщенных жесткостных характеристик b_{ij}, d_{ij}, k_{ij} выражаются через упругие постоянные материала [4].

Симметричная матрица $[K]$ характеризует приведенные мембранные жесткостные характеристиками стенки, матрица $[D]$ - изгибные жесткостные характеристики, матрица $[K]$ - приведенные жесткостные характеристики, описывающие поперечный сдвиг.

Из выражений (2.3) и (2.4) с учетом подстановки (2.5), (2.6) получаем уравнения:

$$\begin{aligned} [S]^T \{\alpha\} - \{P\} &= 0, \\ [S] \{q\} - [H] \{\alpha\} &= 0, \end{aligned}$$

где $[S] = \iint_S [\omega]^T [D] [L] [\Phi] dS,$

$$[H] = \iint_S [\omega]^T [D] [\omega] dS$$

Откуда получается следующее выражение для матрицы жесткости КЭ:

$$[K] = [S]^T [H]^{-1} [S].$$

При численном интегрировании используется схема квадратур Гаусса.

3. Анализ сходимости решений МКЭ.

Для проверки сходимости решения МКЭ к точному (аналитическому) решению рассмотрим ряд тестовых задач. При этом используем модели изотропного и ортотропного тела. Для изотропного тела примем следующие упругие постоянные: модуль упругости $E=200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu=0,3$. Для ортотропного тела: $E_1=20$ ГПа, $E_2=200$ ГПа, $\nu_{12}=0,03$, $\nu_{21}=0,3$, $G_{12}=286,2$ ГПа. Рассмотрим квадратную пластинку, длина стороны которой $a=0,4$ м, толщина $h=2 \cdot 10^{-3}$ м. Представим следующие схемы нагружения:

1. Шарнирно-опертая пластинка, нагруженная в центре сосредоточенной силой $P=500$ Н. На рис.4 изображена расчетная схема и дискретная модель, соответствующая числу КЭ $N=32$. Находим прогиб w точки приложения си-

лы P , а также M_1 , и M_2 - максимальные погонные изгибающие моменты на площадках с нормальными x_1 и x_2 . Результаты расчета представлены в табл. 1. На рис. 5-8 изображены графики сходимости решения в зависимости от числа КЭ. В качестве точного принято аналитическое решение [8].

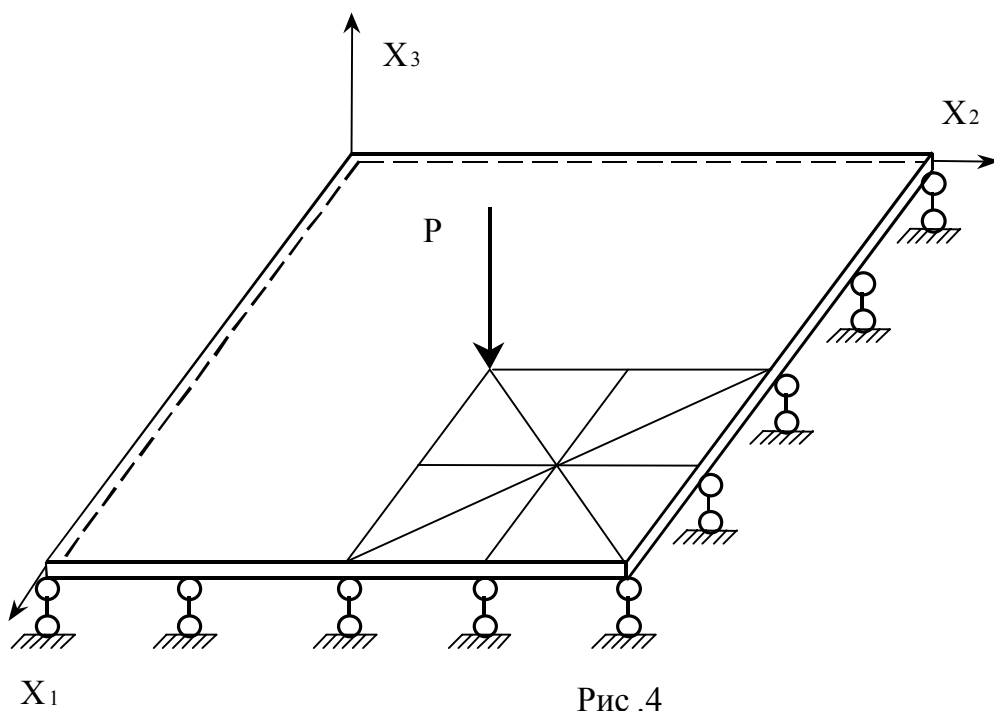


Таблица 1

Число КЭ	Изотропное тело		Анизотропное тело	
	$W, \cdot 10^{-3} \text{ м}$	$M_1, \text{ Нм/м}$	$W, \cdot 10^{-2} \text{ м}$	$M_2, \text{ Нм/м}$
2	1,47	1,1	0,382	1,1
4	3,26	1,4	0,833	2,7
8	5,07	3,9	1,23	6,7
16	5,42	4,5	1,32	7,9
24	5,52	5,1	1,33	7,92
36	6,11	6,7	1,39	11,4
50	6,27	6,9	1,4	12,5
Решение [8]	6,33	7,5	1,45	12,9

Из графиков видно, что при $N=36$ решение МКЭ по перемещениям отличается от точного решения менее, чем на 3%. Это соответствует инженерной точности расчета. Для того чтобы обеспечить такую же точность по напряжениям следует увеличить число КЭ. Точность 3% для анизотропной пластинки достигается лишь при $N=50$.

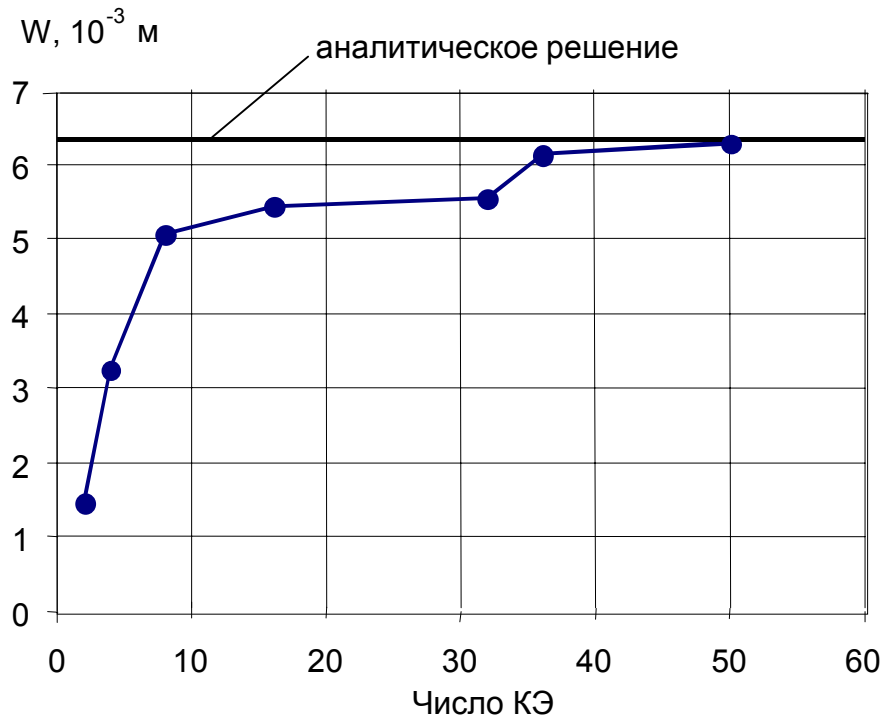


Рис.5

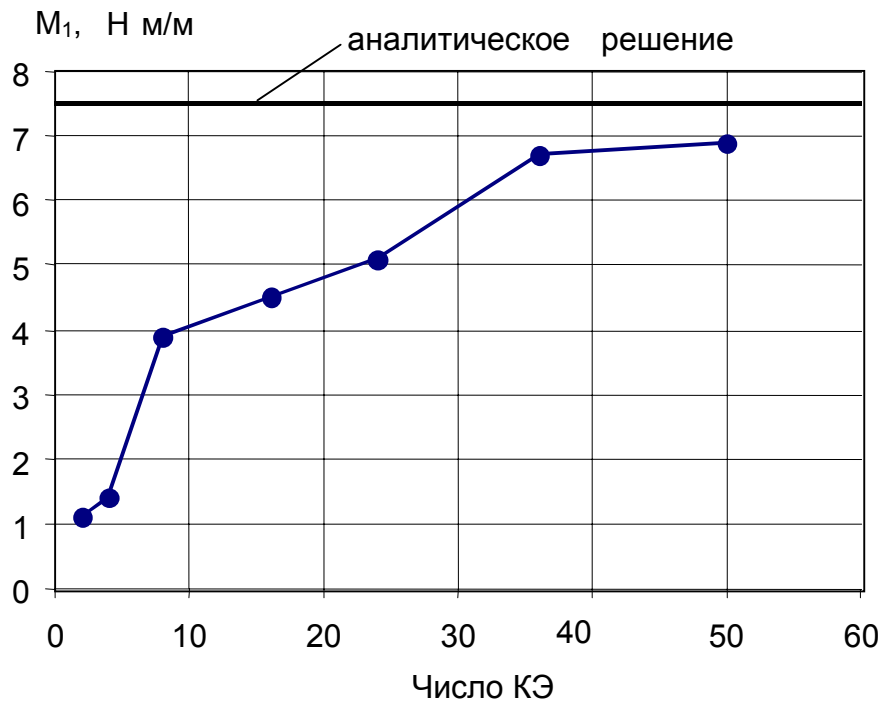


Рис. 6

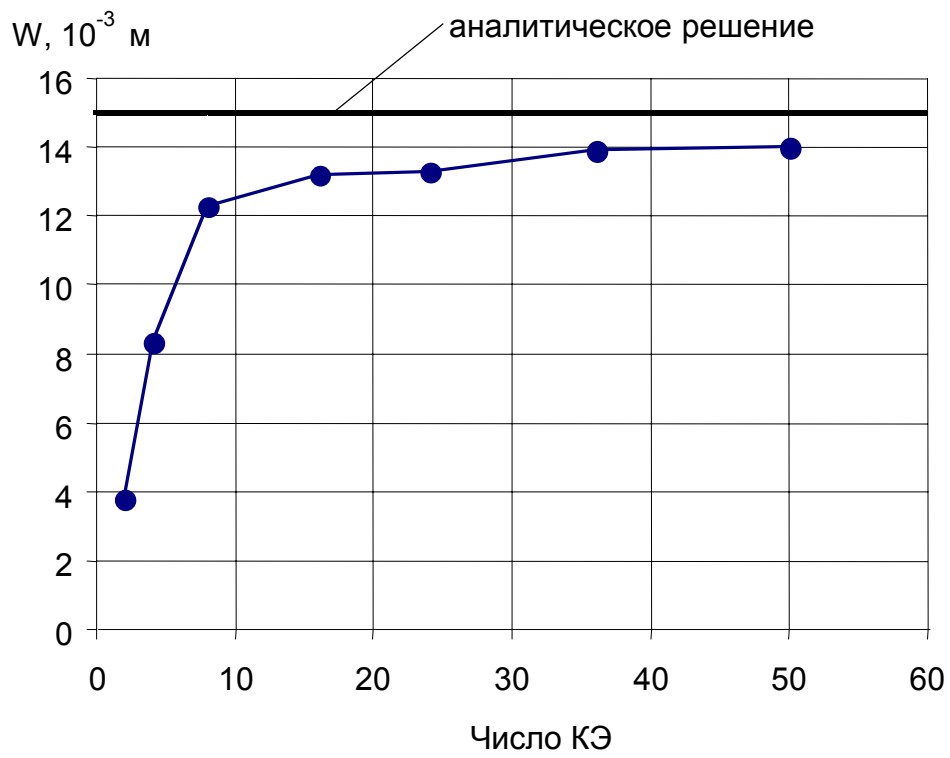


Рис.7

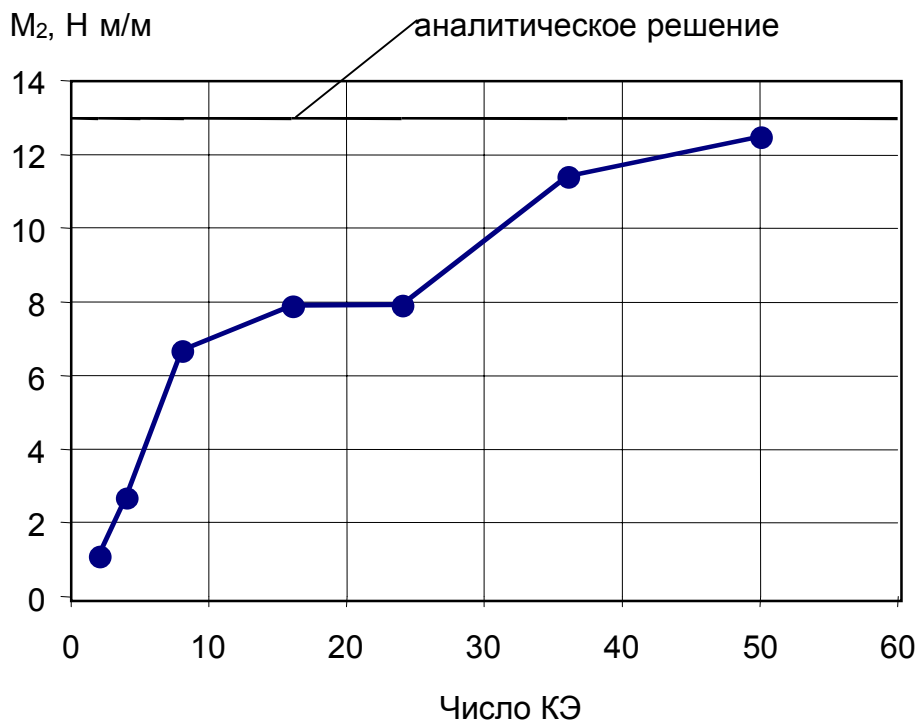


Рис.8

2. Шарнирно-опертая квадратная пластинка, нагруженная распределенной нагрузкой $q=1,25 \cdot 10^4$ Н/м² (рис.9). Результаты расчета представлены в табл. 2. На рис. 10-13 изображены графики сходимости решения в зависимости от числа КЭ. В качестве точного принято аналитическое решение [8].

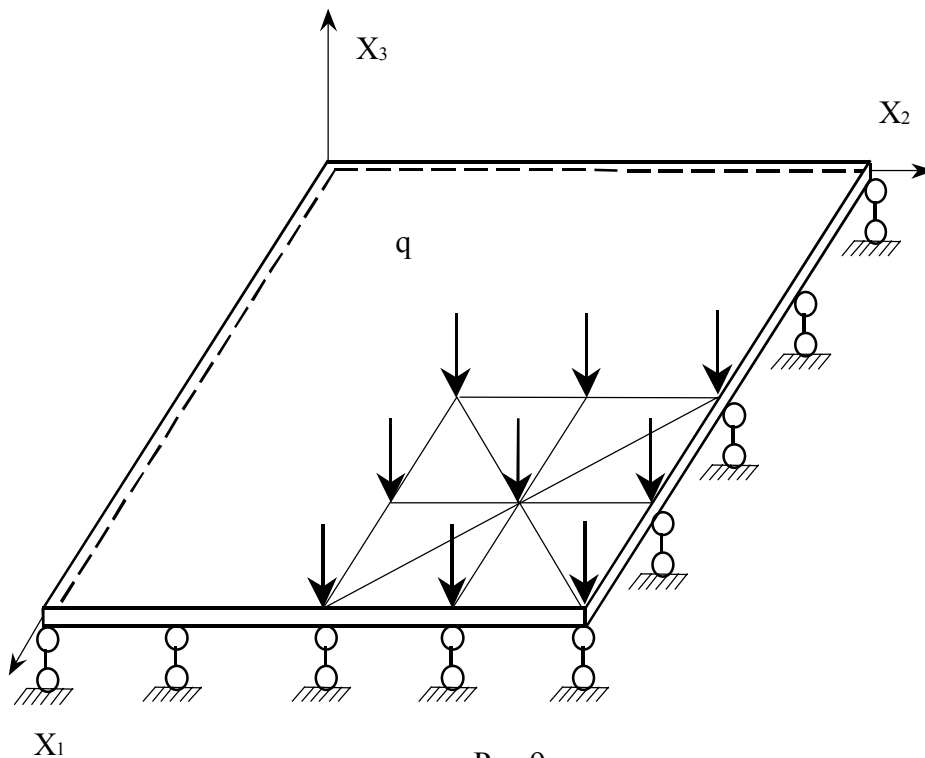


Рис.9

Таблица 2

Число КЭ	Изотропное тело		Анизотропное тело	
	$W, \cdot 10^{-3} \text{ м}$	$M_1, \text{ Нм/м}$	$W, \cdot 10^{-2} \text{ м}$	$M_2, \text{ Нм/м}$
2	1,96	1,4	0,509	1,4
4	4,57	3,9	1,16	7,3
8	7,69	6,7	1,85	12
16	8,05	7	2,05	12,1
24	8,06	8,1	2,06	12,3
36	8,52	9,3	2,08	14,7
50	8,87	9,5	2,11	16,2
Решение [8]	8,87	9,58	2,14	19,3

Из приведенных результатов видно, что при заданной нагрузке для изотропной пластинки уже при $N=36$ решение МКЭ отличается от точного менее, чем на 3% не только по перемещениям, но и по напряжениям.

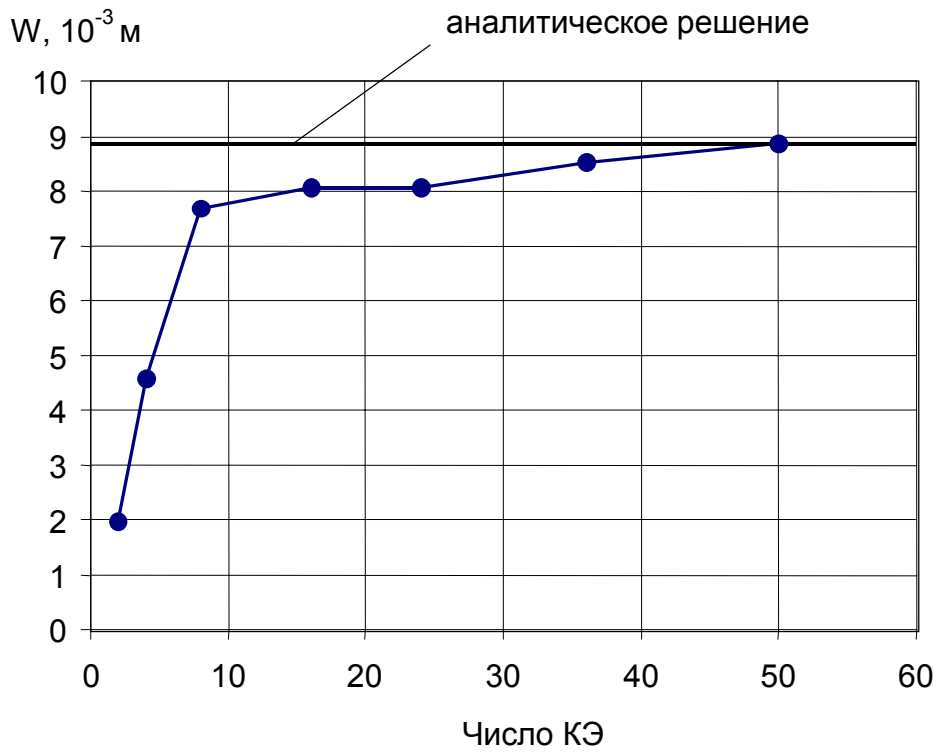


Рис.10

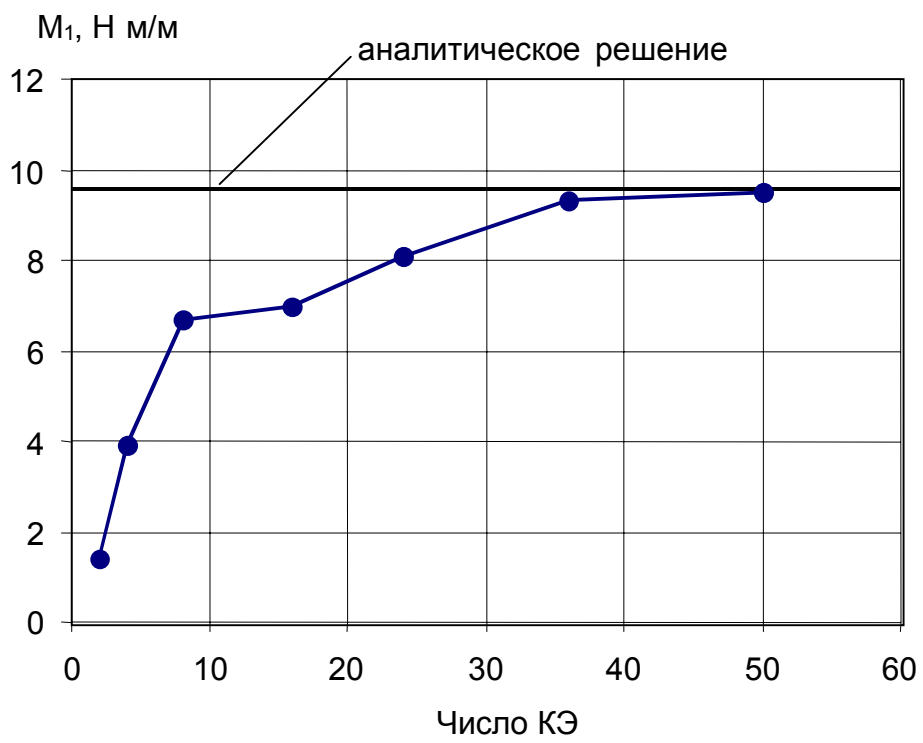


Рис.11

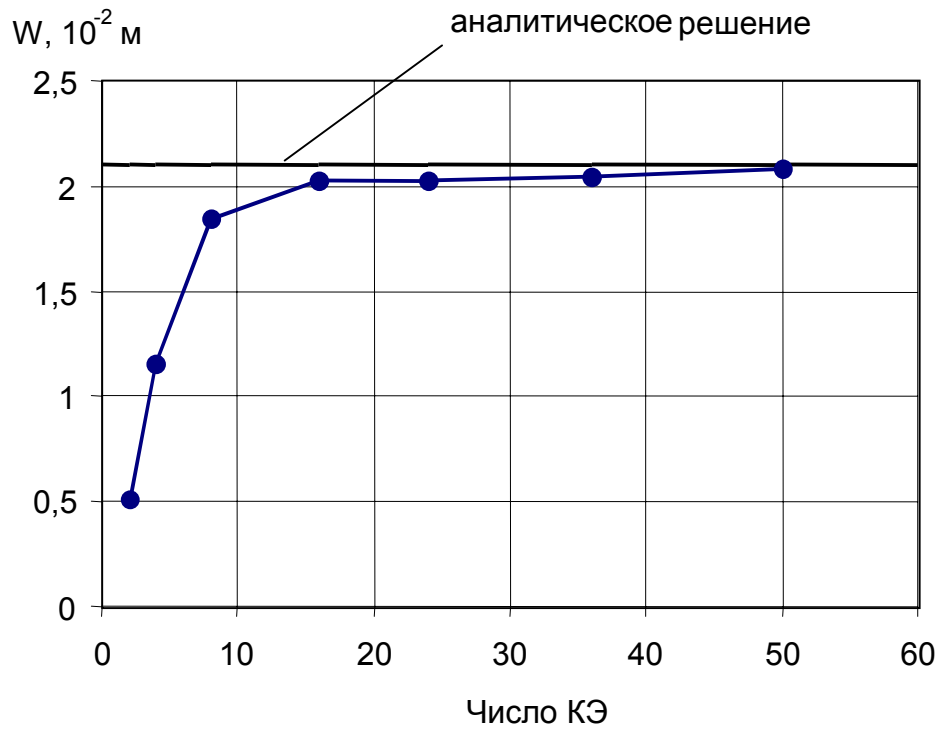


Рис.12

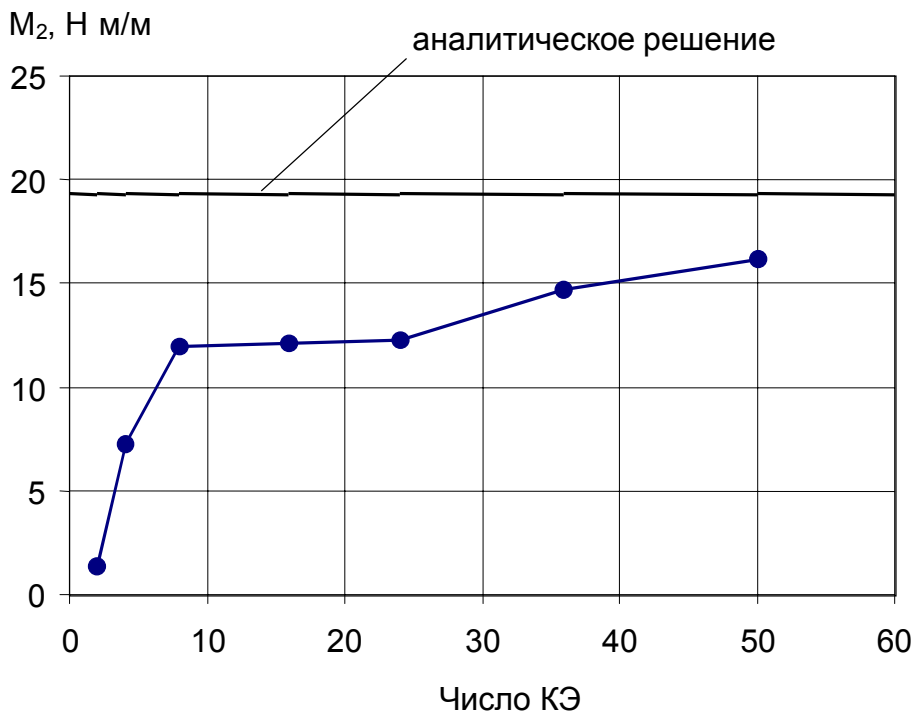


Рис.13

3. Тонкая пластинка с отверстием под действием распределенной нагрузки интенсивности q (рис.14). Для описания упругих свойств материала применяется модель изотропного тела. Используется нерегулярная сетка: для аппроксимации области высоких градиентов напряжений используются более мелкие КЭ. Диаметр отверстия $d=5 \cdot 10^{-2}$ м, стороны $a=0,4$ м, толщина $h=2 \cdot 10^{-3}$ м, нагрузка $q=225$ Н/м.

На рис.15 приведена эпюра распределения внутренних усилий N_1 вдоль оси x_2 . Из эпюры видно, что точки, полученные с помощью выбранного КЭ, совпадают с точным решением. В качестве точного используется аналитическое решение для бесконечной пластинки [11].

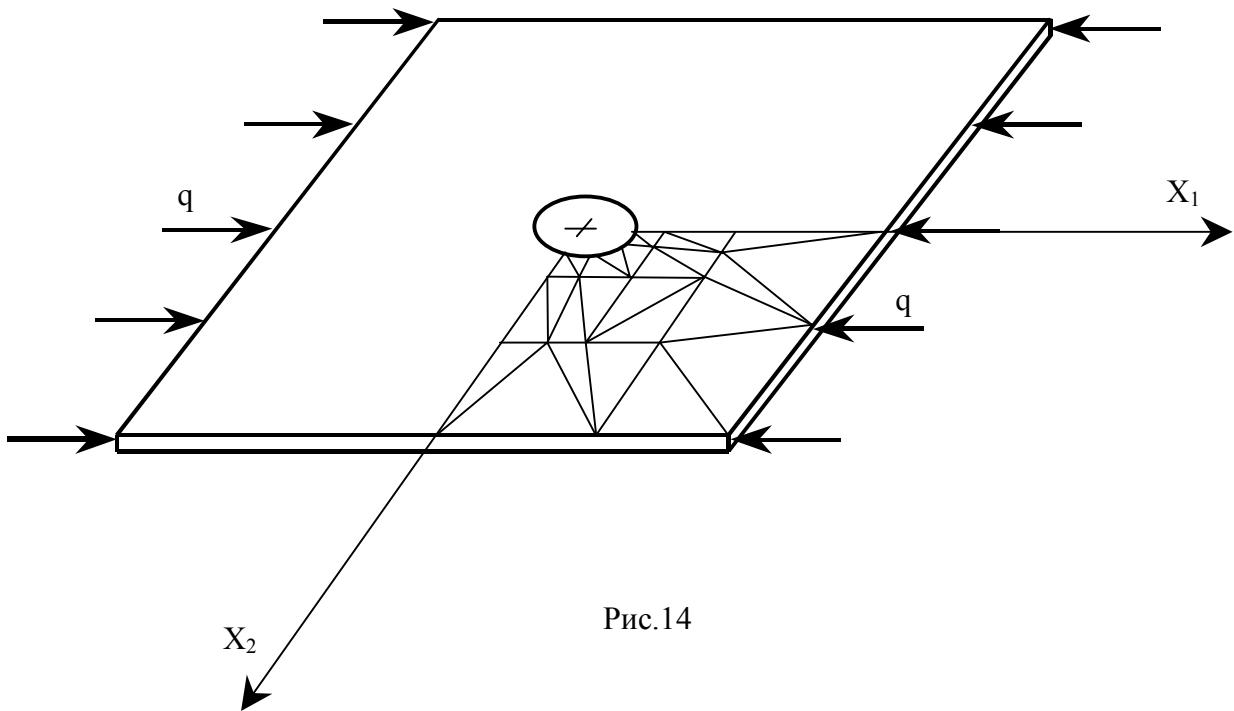


Рис.14

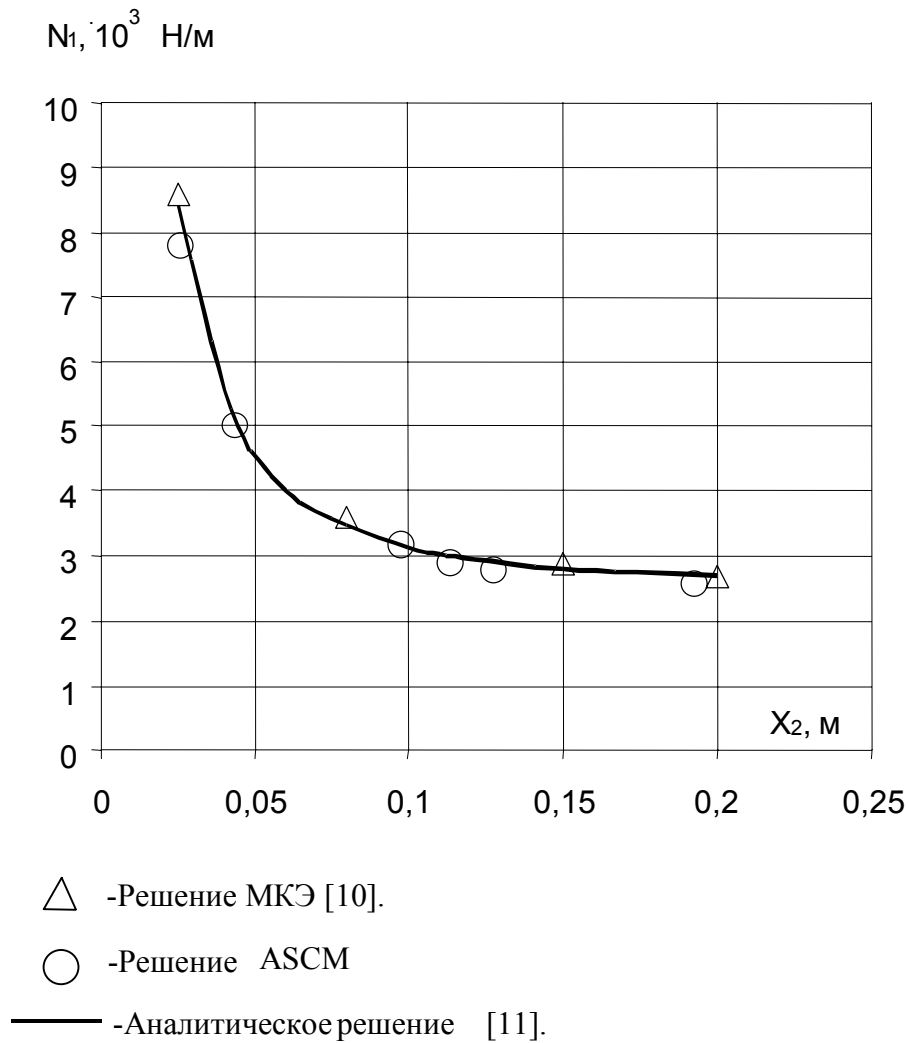


Рис.15

В результате исследований свойств КЭ [6] на примере расчетов тонких пластинок при различных условиях нагружения и закрепления установлена сходимость приближенных решений МКЭ к точным аналитическим решениям при уменьшении размеров КЭ. Сходимость имеет место как по перемещениям, так и по напряжениям. Для получения удовлетворительной точности результатов по напряжениям требуется более мелкая сетка. Сходимость решения наблюдается как для изотропных, так и для анизотропных тел. Полученные результаты свидетельствуют о работоспособности расчетной модели, построенной на базе КЭ [6], для исследования начального НДС тонкостенных элементов музыкальных струнных инструментов.

Литература.

1. Корсаков Г.С. Технология музыкальных инструментов из древесины: Учебное пособие. – Л.: ЛТА, 1986. – 73с.
2. Римский-Корсаков А.В. Дьяконов Н.А. Музыкальные инструменты: Методы исследований и расчеты. – М.: Местная промышленность, 1952.-345с.
3. Куликов Ю.А., Шлычков С.В. Компьютерная динамическая модель музыкального струнного инструмента как композитной конструкции// Композиционные материалы в авиастроении и народном хозяйстве: Материалы Всероссийской научно-технической конференции, 5-8 октября 1999 г. – Казань, 1999 .Ч.II - с.36.
4. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. - М.: Машиностроение, 1984.- 263с.
5. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. - М.: Машиностроение, 1977.-488с.
6. Попов Б.Г. Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами: Учебное пособие. - М.: Издательство МГТУ, 1993. -294с.
7. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988.- 272с.
8. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.-636с.
9. Тимошенко С.П., Дж.Гудьер. Теория упругости. - М.: Наука.-1975.-576с.
- 10.Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. - М.: Недра, 1974.- 239с.
- 11.Расчеты на прочность в машиностроении: в 3 т. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. - М.: Машгиз, 1959., Т.3. - 1118с.